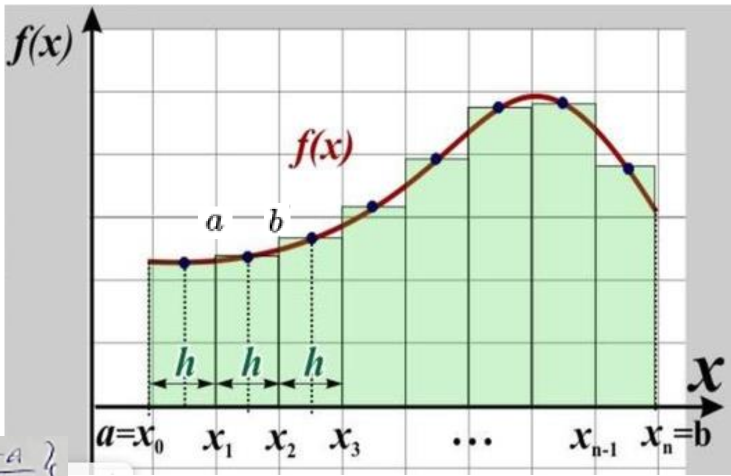
Вычисление определенного интеграла:

квадратурные формулы

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

Метод прямоугольников

См., например, https://ru.wikipedia.org/wiki/



На **частичном** (малом) отрезке для *средних* прямоугольников:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a).$$

Составная (суммарная) формула:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$$

сетка $\omega_h = \{x_i = a + ih,\ i = 0, 1, .., N,\ h = \frac{b-a}{N}\}$

Погрешность метода (погрешность аппроксимации):

частичный отрезок: $\frac{h^3}{24} f_i'' = O(h^3)$, составная: $\frac{h^2(b-a)}{24} \max_i f_i'' = O(h^2)$.

Для левых и правых прямоугольников погрешность $\frac{h^2(b-a)}{2} \max_i f_i'' = O(h^2)$.

Метод трапеций

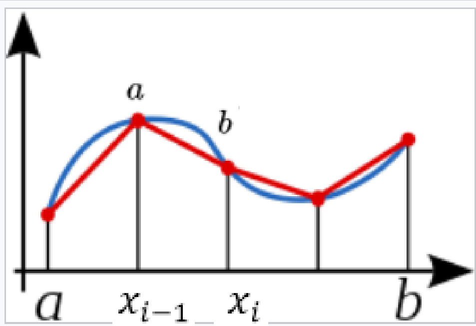
На **частичном** отрезке (линейная интерполяция – красная линия):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Составная формула:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f_0+f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right)$$

$$x_i = a + ih, \qquad h = \frac{b-a}{n},$$



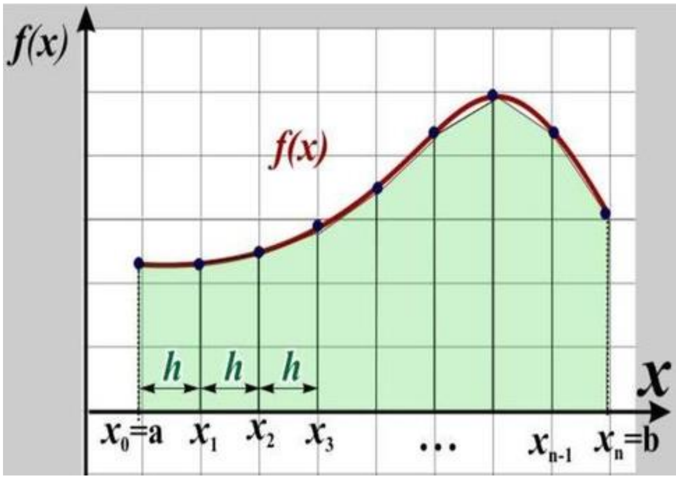
Применение формулы трапеций для равномерной сетки

Погрешность метода трапеций:

частичный отрезок: $\frac{h^3}{12} f_i'' = O(h^3)$,

составная: $\frac{h^2(b-a)}{12} \max_i f_i'' = O(h^2)$,

(в два раза хуже, чем в методе средних прямоугольников)

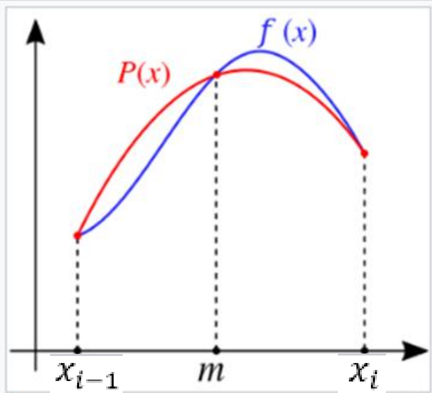


Метод парабол (формула Симпсона)

На **частичном** (малом) отрезке
(делаем квадратичную интерполяцию $P(x)$):

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Средняя точка m



Суть метода — интерполяция функции $f(x)$ (синий график) квадратичным полиномом $P(x)$ (красный)

Составная формула (по узлам, а не средним точкам):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{N} f(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i + h)\right)$$

Индекс меняется с шагом, равным 2***h***.
Теперь количество шагов $N = n/2$.

Погрешность метода:

частичный отрезок $\frac{h^5}{2880} f_i^{(4)} = O(h^5)$,

составная $\frac{h^4(b-a)}{2880} \max_i f_i^{(4)} = O(h^4)$

Интеграл для функций порядка до 3 вычисляется точно. Почему?